UNIVERSITÄT AUGSBURG
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. Jozef Kacur

Dipl. Math. Daniel Köster

Numerische Mathematik I

WS 2005/2006 — Programmieraufgabe — 5.12.2005

Abgabetermin: Mo. 16.1.2006, 12.00

Aufgabe 21 (Randwertproblem, gelöst mit CG-Verfahren).
Die Auslenkung $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2)^T \in \Omega := (0, 2) \times (0, 1)$ einer fest eingespannten elastischen Membran unter dem Einfluß einer äußeren Kraft der Kraftdichte $f = f(x)$, $x \in \Omega$ wird beschrieben durch das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x)\right) &= f(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) &= g, \quad x \in \Gamma := \partial\Omega. \end{aligned}$$

Bei der Approximation der exakten Lösung u durch eine numerische Lösung u_h mit Hilfe Finiter Differenzen

$$\begin{aligned} u_h &: (0, h, \ldots, (2k-2)h) \times (0, h, \ldots, (k-1)h) \to \mathbb{R} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x) &\approx D_{1,h}^2 u_h(x) := \frac{u_h(x_1 - h, x_2) - 2u_h(x_1, x_2) + u_h(x_1 + h, x_2)}{h^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x) &\approx D_{2,h}^2 u_h(x) := \frac{u_h(x_1, x_2 - h) - 2u_h(x_1, x_2) + u_h(x_1, x_2 + h)}{h^2} \end{aligned}$$

bezüglich eines uniformen Gitters der Schrittweite $h = \frac{1}{k-1} > 0$, $k \in \mathbb{N}$ entsteht ein lineares Gleichungssystem $AU = B$, wobei

$$\begin{aligned} i(I) &:= (I-1) \operatorname{div} k, \qquad \text{für } I \in \mathbb{N} \qquad \text{(ganzzahlige Division)}, \\ j(I) &:= (I-1) \bmod k, \qquad \text{für } I \in \mathbb{N} \qquad \text{(Modulo-Operation)}, \\ N &:= 2k^2 - k, \\ U_{\text{exact},I} &:= u(h \cdot i(I), h \cdot j(I)), \qquad \text{für } I = 1, \ldots, N, \\ U_I &:= u_h(h \cdot i(I), h \cdot j(I)), \qquad \text{für } I = 1, \ldots, N, \\ B_I &:= \begin{cases} f(h \cdot i(I), h \cdot j(I)) & \text{für } (h \cdot i(I), h \cdot j(I)) \in \Omega, \\ g(h \cdot i(I), h \cdot j(I)) & \text{für } (h \cdot i(I), h \cdot j(I)) \in \Gamma, \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\sum_{J=1}^{N} A_{IJ} U_J = \begin{cases} -(D_{1,h}^2 + D_{2,h}^2) u_h(h \cdot i(I), h \cdot j(I)) & \text{für } (h \cdot i(I), h \cdot j(I)) \in \Omega, \\ U_I & \text{für } (h \cdot i(I), h \cdot j(I)) \in \Gamma. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix A. Schreiben Sie ein Programm, welches das vorkonditionierte CG-Verfahren auf das Gleichungssystem $AU = B$ anwendet. Dabei soll der eigentliche iterative Löser als Prozedur implementiert werden, der wiederum zwei Prozeduren, welche die Anwendung von A bzw. die Anwendung des Vorkonditionierers W^{-1} auf einen Vektor realisieren, als Parameter übergeben werden.
Des weiteren sollen eine Fehlerschranke ε und ein Startvektor $U^{(0)}$ als Argumente auftreten. Als Startvektor $U^{(0)}$ wählen Sie im Programm die rechte Seite B. *Diese Wahl garantiert die Konvergenz des CG-Verfahrens, da die Symmetrie von A durch die Behandlung der Randwerte zerstört wird!*
Als Abbruchkriterium für die Iteration verwende man

$$(r^{(i)}, W^{-1} r^{(i)})_2 \leq \varepsilon,$$

mit $r^{(i)}$ als dem Residuum bezüglich der i-ten Iterierten und W^{-1} als Matrix zur Vorkonditionierung.
Es wird wegen ihrer Größe nicht ratsam sein, die Matrix A explizit zu speichern. Überlegen Sie sich daher, wie man die Anwendung von A auf einen beliebigen Vektor algorithmisch realisieren kann. Gleiches gilt für W^{-1}.
Als Daten des Problems wähle man

$$\begin{aligned} f(x) &:= \pi^2 \left(\sin(\pi x_1) + \cos(\pi x_2)\right) \qquad \Longrightarrow u(x) = \sin(\pi x_1) + \cos(\pi x_2), \\ g(x) &:= u(x). \end{aligned}$$

Man wähle ferner $\varepsilon = 10^{-7}$.
Für $k \in \{3, 5, 9, 17, 33, 65\}$ vergleiche man die Fehler $\|U - U_{\text{exact}}\|_2$ zur exakten Lösung und die Gesamtzahl der Iterationen einmal ohne Vorkonditionierung, einmal bei Verwendung der symmetrischen Gauss-Seidel Iteration als Vorkonditionierer.

Zur Kontrolle:

		CG		**SGS-PCG**	
k	$\|U - U_{\text{exact}}\|_2$	Iter. CG	Zeit/Sek (Scilab)	Iter. SGS-PCG	Zeit / Sek. (Scilab)
3	1.652512e-01	1	5.000000e-03	3	1.400000e-02
5	9.792198e-02	6	3.300000e-02	7	8.000000e-02
9	4.994107e-02	22	3.150000e-01	12	3.790000e-01
17	2.506537e-02	50	2.508000e+00	23	2.640000e+00
33	1.254410e-02	106	1.945100e+01	43	1.944500e+01
65	6.274155e-03	218	1.581350e+02	83	1.497840e+02

(16 Punkte)